TURUNAN FUNGSI TRIGONOMETRI

MATEMATIKA PEMINATAN KELAS XII

PENYUSUN
Entis Sutisna, S.Pd.

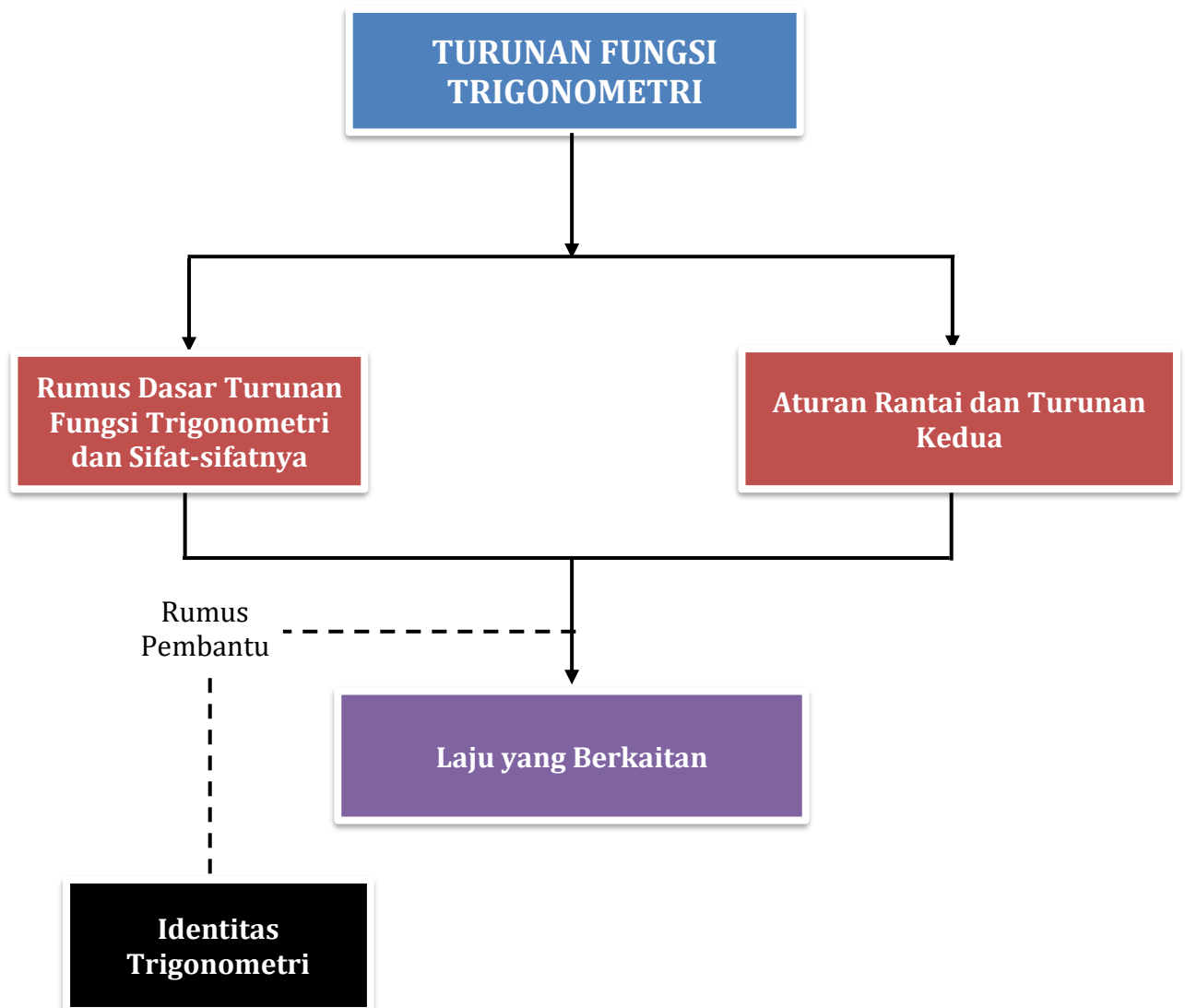
SMA Negeri 4 Tangerang

DAFTAR ISI

GLOSARIUM

Cosinus	:	Suatu fungsi trigonometri dari sebuah sudut. Cosinus suatu sudut dalam segitiga siku-siku adalah perbandingan antara sisi di samping sudut itu terhadap sisi miringnya (hipotenusa).
Fungsi	:	Merupakan suatu relasi yang memetakan setiap anggota dari suatu himpunan yang disebut daerah asal atau domain ke tepat satu anggota himpunan lain yang disebut daerah kawan atau kodomain
Laju yang berkaitan	:	Menghitung laju perubahan suatu besaran dalam bentuk laju perubahan besaran lain
Sinus	:	Suatu fungsi trigonometri dari sebuah sudut. Sinus suatu sudut dalam segitiga siku-siku adalah perbandingan antara sisi yang berhadapan dengan sudut itu terhadap sisi miringnya (hipotenusa).
Tangen	:	Suatu fungsi trigonometri dari sebuah sudut. tangen suatu sudut dalam segitiga siku-siku adalah perbandingan antara sisi yang berhadapan dengan sudut itu terhadap sisi samping sudutnya.
Trigonometri	:	Sebuah cabang matematika yang berkaitan dengan sudut segitiga dan fungsi trigonometri seperti sinus, cosinus, dan tangen.
Turunan	:	Laju perubahan suatu fungsi terhadap perubahan peubahnya.
Turunan kedua	:	Turunan dari turunan pertama.

PETA KONSEP

TURUNAN FUNGSI TRIGONOMETRI
Rumus Dasar Turunan Fungsi Trigonometri dan Sifat-sifatnya
Aturan Rantai dan Turunan Kedua
Rumus Pembantu
Laju yang Berkaitan
Identitas Trigonometri

PENDAHULUAN

A. Identitas Modul

Mata Pelajaran	:	Matematika Peminatan
Kelas	:	XII
Alokasi Waktu	:	12 jam pelajaran
Judul Modul	:	Turunan Fungsi Trigonometri

B. Kompetensi Dasar

3.3 Menggunakan prinsip turunan ke fungsi trigonometri sederhana
4.3 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan turunan fungsi trigonometri

C. Deskripsi Singkat Materi

Salam jumpa melalui pembelajaran matematika dengan materi Turunan Fungsi Trigonometri. Modul ini disusun sebagai satu alternatif sumber bahan ajar siswa untuk memahami materi matematika peminatan kelas XII khususnya Turunan Fungsi Trigonometri. Melalui modul ini Anda diajak untuk memahami konsep Turunan Fungsi Trigonometri, Sifat-sifat Turunan Trigonometri dan Pemecahan Masalah yang terkait dengan Turunan Fungsi Trigonometri.

Jika berbicara mengenai kecepatan, percepatan, nilai maksimum dan minimum suatu fungsi maka sebenarnya kita sedang membahas mengenai turunan. Turunan terkait dengan perubahan. Sesuatu yang bersifat tetap di dunia ini adalah perubahan itu sendiri, banyak kejadian-kejadian yang melibatkan perubahan. Misalnya gerak suatu obyek (kendaraan berjalan, roket bergerak, laju pengisian air suatu tangki), pertumbuhan bibit suatu tanaman, pertumbuhan ekonomi, inflasi mata uang, berkembangbiaknya bakteri, peluruhan muatan radioaktif dan sebagainya. Konsep dasar dari turunan suatu fungsi adalah laju perubahan nilai fungsi.

Tokoh-tokoh yang berjasa dalam mempelajari konsep perubahan sehingga menghasilkan cabang ilmu matematika kalkulus diferensial (turunan) diantaranya: Archimedes (287 – 212 SM), Kepler (1571 – 1630), Galileo (1564 – 1642), Newton (1642 – 1727) dan Leibniz (1646 – 1716). Menurut pendapat para ahli Newton dan Leibniz-lah dua orang yang paling banyak andilnya pada pertumbuhan kalkulus diferensial.

D. Petunjuk Penggunaan Modul

Modul ini dirancang untuk memfasilitasi Anda dalam melakukan kegiatan pembelajaran secara mandiri. Untuk menguasai materi ini dengan baik, ikutilah petunjuk penggunaan modul berikut.

1. Berdoalah sebelum mempelajari modul ini.
2. Pelajari uraian materi yang disediakan pada setiap kegiatan pembelajaran secara berurutan.
3. Perhatikan contoh-contoh penyelesaian permasalahan yang disediakan dan kalau memungkinkan cobalah untuk mengerjakannya kembali.
4. Kerjakan latihan soal yang disediakan, kemudian cocokkan hasil pekerjaan Anda dengan kunci jawaban dan pembahasan pada bagian akhir modul.

5. Jika menemukan kendala dalam menyelesaikan latihan soal, cobalah untuk melihat kembali uraian materi dan contoh soal yang ada.
6. Setelah mengerjakan latihan soal, lakukan penilaian diri sebagai bentuk refleksi dari penguasaan Anda terhadap materi pada kegiatan pembelajaran.
7. Di bagian akhir modul disediakan soal evaluasi, silahkan mengerjakan soal evaluasi tersebut agar Anda dapat mengukur penguasaan terhadap materi pada modul ini. Cocokkan hasil pengerjaan dengan kunci jawaban yang tersedia.
8. Ingatlah, keberhasilan proses pembelajaran pada modul ini tergantung pada kesungguhan Anda untuk memahami isi modul dan berlatih secara mandiri.

E. Materi Pembelajaran

Modul ini terbagi menjadi 2 kegiatan pembelajaran dan di dalamnya terdapat uraian materi, contoh soal, soal latihan dan soal evaluasi.

Pertama : Rumus Dasar Turunan Fungsi Trigonometri dan Sifat-sifatnya

Kedua : Aturan Rantai, Turunan Kedua, dan Laju yang Berkaitan dari Fungsi Trigonometri

KEGIATAN PEMBELAJARAN 1
Rumus Dasar Turunan Fungsi Trigonometri dan Sifat-sifatnya

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 1 ini, diharapkan Anda dapat membuktikan rumus-rumus dasar turunan fungsi trigonometri dan menggunakan prinsip atau aturan-aturan turunan ke fungsi trigonometri sederhana.

B. Uraian Materi

Masih ingatkah Anda dengan definisi turunan yang sudah dipelajari saat Anda di kelas XI? Atau pelajaran trigonometri yang sudah Anda pelajari di kelas X dan XI? Mudah-mudahan masih ingat, termasuk materi limit fungsi trigonometri yang sudah dipelajari pada modul sebelumnya, karena materi-materi tersebut merupakan materi prasyarat untuk memahami konsep turunan fungsi trigonometri.

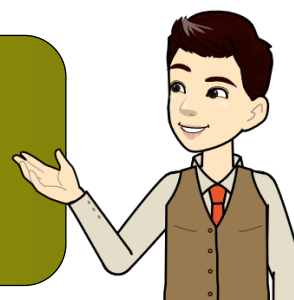
Rumus Dasar Turunan Fungsi Trigonometri

Anda telah melihat pada modul sebelumnya bahwa gradien garis singgung dan kecepatan sesaat adalah manifestasi dari pemikiran dasar yang sama, yaitu *diferensial* atau *turunan*.

Definisi 1

Diferensial/turunan pertama fungsi f adalah fungsi lain f' (dibaca "f aksen") yang nilainya pada sebarang bilangan x adalah

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Jika limitnya ada.

Notasi turunan pertama adalah

$f'(x) = y' = \frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx} = D_x f(x)$

$f'(x) = y'$ diperkenalkan oleh Joseph Louis Lagrange

$\frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx}$ diperkenalkan oleh Gottfried Leibniz

D dan $\frac{d}{dx}$ merupakan operator turunan

Dengan menggunakan definisi turunan mari kita buktikan rumus dasar turunan fungsi trigonometri untuk $y = \sin x$, $y = \sec x$, dan $y = \tan x$, untuk fungsi trigonometri lainnya, yaitu $y = \cos x$, $y = \csc x$, dan $y = \cot x$ diberikan sebagai latihan.

Contoh 1

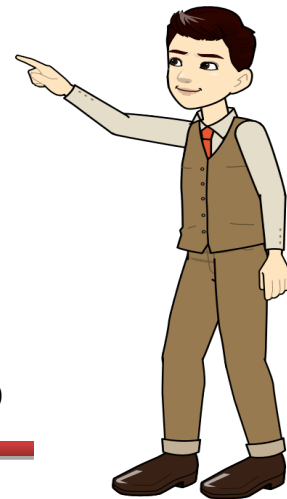
Tentukan turunan pertama fungsi trigonometri $y = f(x) = \sin x$.

Penyelesaian:

Sebelum Anda menentukan turunan pertama fungsi trigonometri $y = f(x) = \sin x$, Anda harus mengingat kembali identitas trigonometri sudut rangkap, jumlah dan selisih sudut dan limit fungsi trigonometri.

Mengingat Kembali

- $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
- $\sin x - \sin y = 2\cos\frac{1}{2}(x + y)\sin\frac{1}{2}(x - y)$
- $1 - \cos ax = 2\sin^2\frac{1}{2}(ax)$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{1}{2}x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{1}{2}x\sin\frac{1}{2}x}{x}$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{1}{2}x}{x}\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{2}x = 2.\frac{1}{2}.\sin(0) = 0$$

Anda akan disajikan menentukan turunan pertama fungsi $y = \sin x$ dengan 2 cara.

Cara 1

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ (definisi turunan)

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$ (substitusikan $f(x) = \sin x$)

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h + \cos x\sin h - \sin x}{h}$$ ($\sin(x+h) = \sin x\cos h + \cos x\sin h$)

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cos x\sin h - \sin x(1 - \cos h)}{h}$$ (sifat distributif)

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cos x\sin h}{h} - \lim_{h\to 0}\frac{\sin x(1-\cos h)}{h}$$ (sifat limit)

$$= \cos x\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} - \sin x\lim_{h\to 0}\frac{(1-\cos h)}{h}$$ (sifat limit)

$$= \cos x(1) - \sin x(0)$$ (rumus limit)

$$= \cos x$$

Cara 2

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ (definisi turunan)

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$ (substitusikan $f(x) = \sin x$)

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\frac{1}{2}(x+h+x)\sin\frac{1}{2}(x+h-x)}{h}$$ ($\sin x - \sin y = 2\cos\frac{1}{2}(x+y)\sin\frac{1}{2}(x-y)$)

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{1}{2}h\right)\sin\frac{1}{2}h}{h}$$ (penyederhanaan)

$$= \lim_{h\to 0}2\cos\left(x+\frac{1}{2}h\right)\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{1}{2}h}{h}$$ (sifat limit)

$$= 2\cos x\,.\frac{1}{2}$$ (sifat limit)

$$= \cos x$$

Jadi, turunan pertama fungsi trigonometri $f(x) = \sin x$ adalah $f'(x) = \cos x$

Contoh 2

Tentukan turunan pertama fungsi trigonometri $y = f(x) = \sec x$.

Penyelesaian:

Sebelum Anda menentukan turunan pertama fungsi trigonometri $y = f(x) = \sec x$, Anda harus mengingat kembali identitas trigonometri sudut rangkap, jumlah dan selisih sudut dan limit fungsi trigonometri.

Mengingat Kembali

- $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ $\qquad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
- $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
- $\cos x - \cos y = -2\sin \frac{1}{2}(x + y) \sin \frac{1}{2}(x - y)$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \text{(definisi turunan)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sec(x+h) - \sec x}{h} \qquad \text{(substitusikan } f(x) = \sec x\text{)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{\cos(x+h)} - \frac{1}{\cos x}\right) \qquad \left(\sec x = \frac{1}{\cos x}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{\cos x - \cos(x+h)}{\cos(x+h)\cos x}\right) \qquad \text{(samakan penyebut)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{\cos x - [\cos x \cos h - \sin x \sin h]}{\cos(x+h)\cos x}\right) \qquad (\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{\cos x - \cos x \cos h + \sin x \sin h}{\cos(x+h)\cos x}\right) \qquad \text{(penyederhanaan)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{\cos x\,(1 - \cos h) + \sin x \sin h}{\cos(x+h)\cos x}\right) \qquad \text{(sifat distributif)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x\,(1 - \cos h)}{h\cos(x+h)\cos x} + \frac{\sin x \sin h}{h\cos(x+h)\cos x} \qquad \text{(penyederhanaan)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(1 - \cos h)}{h\cos(x+h)} + \frac{\sin x}{\cos x} \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h\cos(x+h)} \qquad \text{(sifat limit)}$$

$$= \frac{0}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x}\frac{1}{\cos x} \qquad \text{(sifat limit)}$$

$$= \sec x \tan x$$

Jadi, turunan pertama fungsi trigonometri $f(x) = \sec x$ adalah $f'(x) = \sec x \tan x$.

Contoh 3

Tentukan turunan pertama fungsi trigonometri $y = f(x) = \tan x$.

Penyelesaian:

Sebelum Anda menentukan turunan pertama fungsi trigonometri $y = f(x) = \tan x$, Anda harus mengingat kembali identitas trigonometri, jumlah dan selisih sudut dan limit fungsi trigonometri.

Mengingat Kembali

- $\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$
- $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} && \text{(definisi turunan)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\tan(x+h)-\tan x}{h} && \text{(substitusikan } f(x) = \tan x)\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{\tan x+\tan h}{1-\tan x\tan h}-\tan x\right) && \left(\tan(x+y) = \frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}\right)\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{\tan x+\tan h-\tan x\,(1-\tan x\tan h)}{1-\tan x\tan h}\right) && \text{(samakan penyebut)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{\tan x+\tan h-\tan x+\tan^2 x\tan h}{1-\tan x\tan h}\right) && \text{(penyederhanaan)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\tan h\,(1+\tan^2 x)}{h(1-\tan x\tan h)} && \text{(sifat distributif)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\tan h}{h}\lim_{h\to 0}(1+\tan^2 x)\lim_{h\to 0}\frac{1}{1-\tan x\tan h} && \text{(sifat limit)}\\
&= (1)\,(1+\tan^2 x)\,(1) && \text{(sifat limit)}\\
&= \sec^2 x && (1+\tan^2 x = \sec^2 x)
\end{aligned}
$$

Jadi, turunan fungsi trigonometri $f(x) = \tan x$ adalah $f'(x) = \sec^2 x$.

Sebagai lantihan Anda harus membuktikan turunan fungsi trigonometri berikut.

- $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$
- $f(x) = \csc x \Rightarrow f'(x) = -\csc x \cot x$
- $f(x) = \cot x \Rightarrow f'(x) = -\csc^2 x$

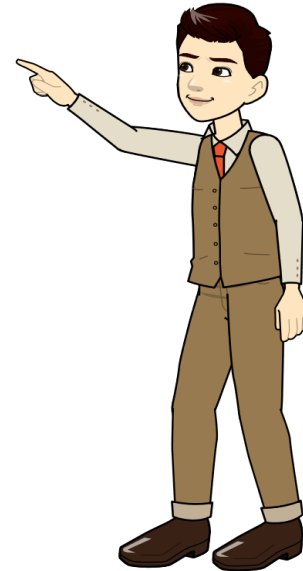
Prinsip Turunan untuk Fungsi Trigonometri Sederhana

Proses pencarian turunan suatu fungsi menggunakan definisi, yakni $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ memakan waktu. Karena itu pada pembelajaran berikutnya kita akan menggunakan aturan pencarian turunan yang telah dipelajari di Kelas XI saat

belajar turunan fungsi aljabar untuk memperpendek proses dari fungsi-fungsi yang tampak rumit.

Namun, sebelumnya kita ulas kembali aturan dasar pencarian turunan dari fungsi aljabar dan fungsi trigonometri.

Mengingat Kembali

- $f(x) = k \Rightarrow f'(x) = 0$, dengan k konstanta
- $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$
- $f(x) = k\,x^n \Rightarrow f'(x) = k.n.x^{n-1}$
- $f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$
- $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$
- $f(x) = \tan x \Rightarrow f'(x) = \sec^2 x$
- $f(x) = \cot x \Rightarrow f'(x) = -\csc^2 x$
- $f(x) = \sec x \Rightarrow f'(x) = \sec x \tan x$
- $f(x) = \csc x \Rightarrow f'(x) = -\csc x \cot x$

Jika k suatu konstanta dan u, v adalah fungsi dari x dan terturunkan, maka aturan pencarian turunan fungsi aljabar berlaku juga pada turunan fungsi trigonometri .

1. Aturan Jumlah, Selisih, dan Perkalian dengan Konstanta

- $f(x) = k\,u \Rightarrow f'(x) = k\,u'$
- $f(x) = u + v \Rightarrow f'(x) = u' + v'$
- $f(x) = u - v \Rightarrow f'(x) = u' - v'$

dengan k konstanta, $u = u(x)$, dan $v = v(x)$

Contoh 4

Tentukan turunan pertama fungsi trigonometri berikut.

a. $f(x) = \sin x - \cos x$.
b. $f(x) = 3x^2 - 4\cos x$
c. $f(x) = 2\tan x + 3x$

Penyelesaian:

a. $f(x) = \sin x - \cos x$

pilih : $u = \sin x \Rightarrow u' = \cos x$

$v = \cos x \Rightarrow v' = -\sin x$

$f(x) = \sin x - \cos x = u - v$

maka

$f'(x) = u' - v'$

$f'(x) = \cos x - (-\sin x)$

$f'(x) = \cos x + \sin x$

b. $f(x) = 3x^2 - 4\cos x$

pilih : $u = x^2 \Rightarrow u' = 2x$

$v = \cos x \Rightarrow v' = -\cos x$

$k_1 = 3$ dan $k_2 = 4$

$f(x) = 3x^2 - 3\cos x = k_1u + k_2v$

maka

$f'(x) = k_1\, u' + k_2\, v'$

$f'(x) = 3\,(2x) - 3\,(-\sin x)$

$f'(x) = 6x + 3\sin x$

c. $f(x) = 2\tan x + 3x$

pilih : $u = \tan x \Rightarrow u' = \sec^2 x$

$v = x \Rightarrow v' = 1$

$k_1 = 2$ dan $k_2 = 3$

$f(x) = 2\tan x + 3x = k_1u + k_2v$

maka

$f'(x) = k_1\, u' + k_2\, v'$

$f'(x) = 2\sec^2 x + 3$

Contoh 5

Jika $f(x) = \sin x + \cos x + \tan x$, maka $f'(0) = \ldots.$

Penyelesaian:

$f(x) = \sin x + \cos x + \tan x$

$f'(x) = \cos x - \sin x + \sec^2 x$

$f'(0) = \cos 0 - \sin 0 + \sec^2 0$

$= 1 - 0 + 1$

$= 2$

2. Aturan Perkalian

$f(x) = u\,.\,v \Rightarrow f'(x) = u'.\,v + u\,.\,v'$ dengan $u = u(x)$ dan $v = v(x)$

Contoh 6

Tentukan turunan pertama fungsi trigonometri berikut.

a. $f(x) = x^2 \sin x$

b. $f(x) = 3x \sin x + \cot x$

c. $f(x) = 2\cos x \sin x$

Penyelesaian:

a. $f(x) = x^2 \sin x$

pilih $u = x^2 \Rightarrow u' = 2x$

$v = \sin x \Rightarrow v' = \cos x$

$f(x) = x^2 \sin x = u\,.\,v$

maka

$f'(x) = u'.\,v + u\,.\,v'$

$f'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x$

b. $f(x) = 3x \sin x + \cot x$

pilih $u = 3x \Rightarrow u' = 3$

$v = \sin x \Rightarrow v' = \cos x$

$w = \cot x \Rightarrow w' = -\csc^2 x$

$f(x) = 3x \sin x + \cot x = u\,.\,v + w$

maka

$f'(x) = u'\,.\,v + u\,.\,v' + w'$

$f'(x) = 3\sin x + 3x\cos x + (-\csc^2 x)$

$= 3 \sin x + 3x \cos x - \csc^2 x$

c. $f(x) = 2 \cos x \sin x$

pilih $u = 2 \cos x \Rightarrow u' = -2 \sin x$

$v = \sin x \Rightarrow v' = \cos x$

$f(x) = 2 \cos x \sin x = u \cdot v$

maka

$f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$

$f'(x) = (-2 \sin x)(\sin x) + (2 \cos x)(\cos x)$

$f'(x) = -2 \sin^2 x + 2 \cos^2 x$

$f'(x) = 2 (\cos^2 x - \sin^2 x)$

$f'(x) = 2 \cos 2x$ $(\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x)$

3. Aturan Pembagian

$f(x) = \frac{u}{v} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ dengan $u = u(x)$ dan $v = v(x)$

Contoh 7

Tentukan turunan pertama fungsi trigonometri berikut.

a. $f(x) = \tan x$

b. $f(x) = \frac{\cos x}{1+\cos x}$

c. $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}$

Penyelesaian:

a. $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

pilih $u = \sin x \Rightarrow u' = \cos x$

$v = \cos x \Rightarrow v' = -\sin x$

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{u}{v}$$

maka

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$f'(x) = \frac{(\cos x)(\cos x) - (\sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad (\cos^2 x + \sin^2 x = 1)$$

$$f'(x) = \sec^2 x \qquad (\frac{1}{\cos x} = \sec x)$$

Menunjukkan hasil yang sama dengan turunan $f(x) = \tan x$ menggunakan definisi.

b. $f(x) = \frac{\cos x}{1+\cos x}$

pilih $u = \cos x \Rightarrow u' = -\sin x$

$v = 1 + \cos x \Rightarrow v' = -\sin x$

$$f(x) = \frac{\cos x}{1 + \cos x} = \frac{u}{v}$$

maka

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$
$$f'(x) = \frac{(-\sin x)(1 + \cos x) - (\cos x)(-\sin x)}{(1 + \cos x)^2}$$
$$f'(x) = \frac{-\sin x - \sin x \cos x + \cos x \sin x}{(1 + \cos x)^2}$$
$$f'(x) = \frac{-\sin x}{(1 + \cos x)^2}$$

c. $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}$

pilih $u = \cos x \Rightarrow u' = -\sin x$

$v = \sin x + \cos x \Rightarrow v' = \cos x - \sin x$

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} = \frac{u}{v}$$

maka

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$
$$f'(x) = \frac{(-\sin x)(\sin x + \cos x) - (\cos x)(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-\sin^2 x - \sin x \cos x - \cos^2 x + \cos x \sin x}{\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x}$$
$$f'(x) = \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{1 + \sin 2x} \qquad (2 \sin x \cos x = \sin 2x)$$
$$f'(x) = \frac{-1}{1 + \sin 2x} \qquad (\cos^2 x + \sin^2 x = 1)$$

C. Rangkuman

- Diferensial/turunan pertama fungsi f adalah fungsi lain f' (dibaca "f aksen") yang nilainya pada sebarang bilangan x adalah

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

  Jika limitnya ada.

- Rumus dasar turunan pertama fungsi trigonometri
  - $f(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \cos x$
  - $f(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\sin x$
  - $f(x) = \tan x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \sec^2 x$
  - $f(x) = \cot x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\csc^2 x$
  - $f(x) = \sec x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \sec x \tan x$
  - $f(x) = \csc x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\csc x \cot x$

- Jika k suatu konstanta dan u, v adalah fungsi dari x dan terturunkan, maka aturan pencarian turunan fungsi aljabar berlaku juga pada turunan fungsi trigonometri .
  - $f(x) = k\,u \quad \Rightarrow \quad f'(x) = k\,u'$
  - $f(x) = u + v \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u' + v'$
  - $f(x) = u - v \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u' - v'$
  - $f(x) = u \,.\, v \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'.\, v + u \,.\, v'$
  - $f(x) = \frac{u}{v} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

D. Latihan Soal

Kerjakan latihan soal berikut dengan jujur dan benar.

1. Buktikan rumus dasar turunan fungsi trigonometri berikut dengan definisi.
   a. $f(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\sin x$
   b. $f(x) = \csc x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\csc x \cot x$
   c. $f(x) = \cot x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\csc^2 x$
2. Tentukan turunan pertama fungsi trigonometri berikut.
   a. $f\ (x) = 3x \sin x + \cos x$
   b. $f\ (x) = 2x \cos x - x^3$
   c. $f\ (x) = \frac{\cos x}{5+\sin x}$
3. Tentukan $f'(x)$ dan nilai $f'(x)$ dari fungsi $f(x) = 3x - \cos x + \tan x$ untuk $x = \frac{\pi}{3}$.
4. Tentukan $f'(x)$ untuk $f(x) = \cos^3(2x - 1)$

Kunci Jawaban dan Pembahasan

1. Buktikan rumus dasar turunan fungsi trigonometri berikut dengan definisi.

   a. $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$ ***(Skor Maksimum 20)***

   Penyelesaian:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$ (definisi turunan)

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$$ (substitusikan $f(x) = \cos x$)

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cos h - \sin x\sin h - \cos x}{h}$$ ($\cos(x+h)=\cos x\cos h - \sin x\sin h$)

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cos x(\cos h - 1) - \sin x\sin h}{h}$$ (sifat distributif)

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cos x(\cos h - 1)}{h} - \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\sin h}{h}$$ (sifat limit)

$$= \cos x\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} - \sin x\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}$$ (sifat limit)

$$= \cos x(0) - \sin x(1)$$ (rumus limit)

$$= -\sin x$$

Jadi, turunan pertama fungsi trigonometri $f(x) = \cos x$ adalah $f'(x) = -\sin x$.

   b. $f(x) = \csc x \Rightarrow f'(x) = -\csc x\cot x$ ***(Skor Maksimum 20)***

   Penyelesaian:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$ (definisi turunan)

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\csc(x+h)-\csc x}{h}$$ (substitusikan $f(x) = \sec x$)

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{\sin(x+h)} - \frac{1}{\sin x}\right)$$ ($\csc x = \frac{1}{\sin x}$)

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{\sin x - \sin(x+h)}{\sin(x+h)\sin x}\right)$$ (samakan penyebut)

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{\sin x - [\sin x\cos h + \cos x\sin h]}{\sin(x+h)\sin x}\right)$$ ($\sin(x+y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y$)

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{\sin x - \sin x\cos h - \cos x\sin h}{\sin(x+h)\sin x}\right)$$ (penyederhanaan)

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{\sin x(1-\cos h) - \cos x\sin h}{\sin(x+h)\sin x}\right)$$ (sifat distributif)

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cos x(1-\cos h)}{h\sin(x+h)\sin x} - \frac{\cos x\sin h}{h\sin(x+h)\sin x}$$ (penyederhanaan)

$$= \frac{\cos x}{\sin x}\lim_{h\to 0}\frac{(1-\cos h)}{h\sin(x+h)} - \frac{\cos x}{\sin x}\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h\sin(x+h)}$$ (sifat limit)

$$= \cot x\frac{0}{\cos x} - \cot x\frac{1}{\sin x}$$ (sifat limit)

$$= -\csc x\cot x$$

Jadi, turunan pertama fungsi trigonometri $f(x) = \csc x$ adalah $f'(x) = -\csc x\cot x$.

   c. $f(x) = \cot x \Rightarrow f'(x) = -\csc^2 x$ ***(Skor Maksimum 20)***

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$ (definisi turunan)

$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{\cot(x+h) - \cot x}{h}$ (substitusikan $f(x) = \cot x$)

$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{\tan(x+h)} - \frac{1}{\tan x}\right)$ ($\cot x = \frac{1}{\tan x}$)

$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1 - \tan x \tan h}{\tan x + \tan h} - \frac{1}{\tan x}\right)$ ($\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$)

$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{(1 - \tan x \tan h)\tan x - (\tan x + \tan h)}{(\tan x + \tan h)\tan x}\right)$ (samakan penyebut)

$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{\tan x - \tan^2 x \tan h - \tan x - \tan h}{(\tan x + \tan h)\tan x}\right)$ (penyederhanaan)

$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{-\tan h\,(\tan^2 x + 1)}{h\,(\tan x + \tan h)\tan x}$ (sifat distributif)

$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{-\tan h}{h} \lim\limits_{h \to 0}(\tan^2 x + 1) \lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{(\tan x + \tan h)\tan x}$ (sifat limit)

$= (-1)\,(1 + \tan^2 x)\,(\frac{1}{\tan^2 x})$ (sifat limit)

$= -\sec^2 x (\frac{1}{\tan^2 x})$ ($1 + \tan^2 x = \sec^2 x$)

$= -\frac{1}{\cos^2 x}(\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x})$ ($\sec x = \frac{1}{\cos x}, \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}$)

$= -\frac{1}{\sin^2 x}$

$= -\csc^2 x$

Jadi, turunan fungsi trigonometri $f(x) = \cot x$ adalah $f'(x) = -\csc^2 x$.

2. Tentukan turunan pertama fungsi trigonometri berikut.

a. $f(x) = 3x \sin x + \cos x$ ***(Skor Maksimum 10)***

Penyelesaian:

$y = 3x \sin x + \cos x$

Untuk $3x.\sin x$ dimisalkan:

$u = 3x \rightarrow u' = 3$

$v = \sin x \rightarrow v' = \cos x$

Jadi,

$y' = 3\sin x + 3x\cos x + (-\sin x)$

$y' = 2\sin x + 3x\cos x$

b. $f(x) = 2x \cos x - x^3$ ***(Skor Maksimum 10)***

Penyelesaian:

$y = 2x \cos x - x^3$

Untuk $2x.\cos x$ dimisalkan:

$u = 2x \rightarrow u' = 2$

$v = \cos x \rightarrow v' = -\sin x$

Jadi,

$y' = 2.(\cos x) + 2x.(-\sin x) - 3x^2$

$y' = 2\cos x - 2x\sin x - 3x^2$

c. $f(x) = \frac{\cos x}{5 + \sin x}$ ***(Skor Maksimum 10)***

Penyelesaian:

$f(x) = \frac{\cos x}{5 + \sin x}$

Misalkan:

$u = \cos x \rightarrow u' = -\sin x$

$v = 5 + \sin x \rightarrow v' = \cos x$

Jadi,

$$f\ '\ (x) = \frac{u\ 'v - uv\ '}{v^2}$$
$$= \frac{(-\sin x\ )(5 + \sin x\ ) - \cos x\ \cos x}{(5 + \sin x\ )^2}$$
$$= \frac{-5\sin x\ - \sin^2 x\ - \cos^2 x}{(5 + \sin x\ )^2}$$
$$= \frac{-5\sin x - (\sin^2 x + \cos^2 x\ )}{(5 + \sin x\ )^2}$$
$$= \frac{-5\sin x\ - 1}{(5 + \sin x\ )^2}$$

3. Tentukan $f'(x)$ dan nilai $f'(x)$ dari fungsi $f(x) = 3x - \cos x + \tan x$ untuk $x = \frac{\pi}{3}$.

(Skor Maksimum 10)

Penyelesaian:

$f(x) = 3x - \cos x + \tan x$

$f'(x) = 3 + \sin x - \sec^2 x$ dan

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3 + \sin\frac{\pi}{3} - \sec^2\frac{\pi}{3}$$
$$= 3 + \frac{1}{2}\sqrt{3} - 4$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{3} - 1$$

E. Penilaian Diri

Ananda isilah pertanyaan pada tabel di bawah ini sesuai dengan yang Anda ketahui, berilah penilaian secara jujur, objektif, dan penuh tanggung jawab dengan memberi tanda centang pada kolom pilihan.

No.	Pertanyaan	Jawaban	
		Ya	**Tidak**
1.	Apakah Anda telah memahami pengertian turunan fungsi trigonometri.		
2.	Apakah Anda telah mampu membuktikan rumus dasar turunan fungsi trigonometri.		
3.	Apakah anda telah mampu menggunakan prinsip turunan jumlah dan selisih ke turunan fungsi trigonometri?		
4.	Apakah anda telah mampu menggunakan prinsip turunan perAnda dua fungsi ke turunan fungsi trigonometri?		
5.	Apakah anda telah mampu menggunakan prinsip turunan pembagian ke turunan fungsi trigonometri?		

Catatan:
Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan review pembelajaran,
Bila semua jawaban "Ya", maka Anda dapat melanjutkan ke pembelajaran berikutnya.

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2

Aturan Rantai, Turunan Kedua, dan Laju yang Berkaitan dari Fungsi Trigonometri

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 2 ini, diharapkan Anda dapat menerapkan Aturan Rantai dalam menentukan turunan fungsi komposisi trigonometri, menentukan turunan kedua fungsi trigonometri, dan menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan turunan fungsi trigonometri khususnya laju yang berkaitan.

B. Uraian Materi

Aturan Rantai

Andaikan Anda diminta menentukan turunan fungsi $F(x) = \cos(3x - 5)$. Rumus turunan yang telah Anda pelajari tidak memungkinkan Anda untuk menghitung $F'(x)$.

Amati oleh Anda bahwa F berupa fungsi komposisi. Pada kenyataannya, andaikan $y = f(u) = \cos u$ dan $u = g(x) = 3x - 5$, maka kita dapat menuliskan $y = F(x) = f(g(x))$, yakni $F = f \circ g$. Kita ketahui bagaimana menentukan turunan fungsi f dan g, sehingga akan bermanfaat sebagai aturan yang memberitahu kita bagaimana menurunkan $F = f \circ g$ dalam bentuk turunan dari f dan g.

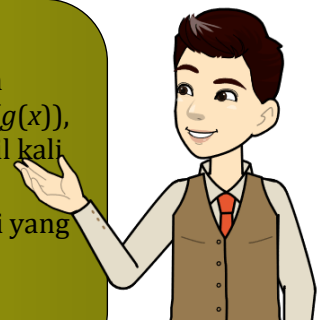
Ternyata turunan fungsi komposisi adalah hasil kali turunan f dan g. Fakta ini merupakan salah satu dari aturan turunan yang terpenting dan disebut **Aturan Rantai**.

Aturan Rantai

Jika f dan g keduanya fungsi fungsi yang dapat diturunkan dan $F = f \circ g$ adalah fungsi komposisi yang didefinisikan oleh $F = f(g(x))$, maka F dapat diturunkan menjadi F' yang diberikan oleh hasil kali

$$F'(x) = f'\big(g(x)\big)g'(x) \qquad (1)$$

Dalam notasi Leibniz, jika $y = f(u)$ dan $u = g(x)$ keduanya fungsi yang dapat diturunkan, maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \qquad (2)$$

Untuk lebih memahami lagi tentang aturan rantai pelajari contoh beriku.

Contoh 1

Carilah $F'(x)$ jika $F(x) = \cos(3x - 5)$.

Penyelesaian:

- **Menggunakan persamaan (1)**
  - Nyatakan F sebagai $F(x) = f \circ g\ (x) = f(g(x))$, dengan $f(u) = \cos u$ dan $u = g(x) = 3x - 5$
  - Cari turunan dari f dan g
    $f'(u) = -\sin u$
    $f'(g(x)) = -\sin g(x) = -\sin(3x - 5)$
    dan $g'(x) = 3$

- Cari $F'(x)$

  $F'(x) = f'(g(x))g'(x)$

  $= -\sin(3x - 5).(3)$

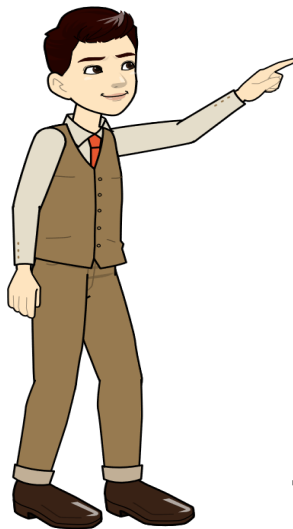
  $= -3\sin(3x - 5)$

❖ **Menggunakan persamaan (2)**

Misalkan $u = 3x - 5 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3$

dan $y = \cos u \Rightarrow \frac{dy}{du} = -\sin u$

maka

$$F'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = -\sin u\ (3) = -3\sin u = -3\sin(3x - 5)$$

Catatan:
Dalam menggunakan aturan rantai kita bekerja dari luar ke dalam. Rumus (1) mengatakan bahwa kita menurunkan fungsi sebelah luar f (pada fungsi lebih dalam $g(x)$) *dan kemudian kita kalikan dengan turunan fungsi sebelah dalam*.

$$\frac{d}{dx}\underbrace{f}_{\text{fungsi sebelah luar}}\underbrace{(g(x))}_{\text{dihitung pada fungsi sebelah dalam}} = \underbrace{f'}_{\text{turunan fungsi sebelah luar}}\underbrace{(g(x))}_{\text{dihitung pada fungsi sebelah dalam}}\cdot\underbrace{g'(x)}_{\text{turunan fungsi sebelah dalam}}$$

Contoh 2

Tentukan turunan pertama dari fungsi trigonometri berikut.

a. $y = \sin(x^2 - 3x)$

b. $y = \sin^2 x$

Penyelesaian:

a. Jika $y = \sin(x^2 - 3x)$, maka fungsi sebelah luar adalah fungsi sinus dan fungsi sebelah dalam adalah fungsi kuadrat, sehingga aturan rantai memberikan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\underbrace{\sin}_{\text{fungsi sebelah luar}}\underbrace{(x^2 - 3x)}_{\text{dihitung pada fungsi sebelah dalam}} = \underbrace{\cos}_{\text{turunan fungsi sebelah luar}}\underbrace{(x^2 - 3x)}_{\text{dihitung pada fungsi sebelah dalam}}\cdot\underbrace{(2x - 3)}_{\text{turunan fungsi sebelah dalam}}$$

$$\frac{dy}{dx} = (2x - 3)\cos(x^2 - 3x)$$

b. Jika $y = \sin^2 x = (\sin x)^2$, maka fungsi sebelah luar adalah fungsi kuadrat dan fungsi sebelah dalam adalah fungsi sinus, sehingga aturan rantai memberikan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\underbrace{(\sin x)^2}_{\text{fungsi sebelah luar}} = \underbrace{2}_{\text{turunan fungsi sebelah luar}}\underbrace{(\sin x)}_{\text{dihitung pada fungsi sebelah dalam}}\cdot\underbrace{(\cos x)}_{\text{turunan fungsi sebelah dalam}}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2\sin x\cos x$$

$= \sin 2x$ ($\sin 2x = 2\sin x\cos x$)

Dari Contoh 2 dapat disimpulkan sebagai berikut.

Aturan Rantai

$y = k\,u^n \Rightarrow y' = k\,n\,u^{n-1} . u'$

$y = \sin u \Rightarrow y' = \cos u . u'$

$y = \cos u \Rightarrow y' = -\sin u . u'$

$y = \tan u \Rightarrow y' = \sec^2 u . u'$

$y = \cot u \Rightarrow y' = -\csc^2 u . u'$

$y = \sec u \Rightarrow y' = \sec u \tan u . u'$

$y = \csc u \Rightarrow y' = -\csc u \cot u . u'$

dengan k kostanta dan $u = u(x)$

Contoh 3

Tentukan turunan pertama dari fungsi trigonometri berikut.

a. $y = \cos(3x^2 - 5)$

b. $y = \tan^2 x$

Penyelesaian:

a. $y = \cos(3x^2 - 5)$

$y = \cos u \Rightarrow y' = -\sin u . u'$

$y = \cos(3x^2 - 5) \Rightarrow y = -\sin(3x^2 - 5) . (6x) = -6x \sin(3x^2 - 5)$

b. $y = \tan^2 x = (\tan x)^2$

$y = k\,u^n \Rightarrow y' = k\,n\,u^{n-1} . u'$

$y = \tan^2 x = (\tan x)^2 \Rightarrow y' = 2 \tan x . (\sec^2 x) = 2 \tan x . \sec^2 x$

Alasan untuk nama "Aturan Rantai" menjadi jelas pada waktu kita membuat rantai yang lebih panjang dengan cara menambahkan mata rantai lain. Andaikan bahwa $y = f(u)$, $u = g(v)$, dan $v = h(x)$, dengan fungsi f, g, dan dapat diturunkan. Maka, untuk menghitung turunan y terhadap x, kita gunakan Aturan rantai dua kali:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx}$$

Contoh 4

Tentukan turunan pertama dari fungsi trigonometri $y = \sin^3(2x^2 - 3x)$

Penyelesaian:

Cara 1

$y = \sin^3(2x^2 - 3x)$

Misalkan $v = 2x^2 - 3x \Rightarrow \frac{dv}{dx} = 4x - 3$

$u = \sin v \Rightarrow \frac{du}{dv} = \cos v$

$y = u^3 \Rightarrow \frac{dy}{du} = 3u^2$

maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx}$$

$= 3u^2 \cos v\,(4x - 3)$

$= 3(\sin v)^2 \cos(2x^2 - 3x)(4x - 3)$

$= 3 \sin^2(2x^2 - 3x) \cos(2x^2 - 3x)(4x - 3)$

$= 3(4x - 3) \sin^2(2x^2 - 3x) \cos(2x^2 - 3x)$

$= (12x - 9) \sin^2(2x^2 - 3x) \cos(2x^2 - 3x)$

Cara 2

Fungsi sebelah luar adalah fungsi kubik, fungsi tengah adalah fungsi sinus, dan fungsi dalam adalah fungsi kuadrat.

$$\frac{dy}{dx} = 3\sin^2(2x^2 - 3x)\frac{d}{dx}(\sin(2x^2 - 3x))$$
$$= 3\sin^2(2x^2 - 3x)(\cos(2x^2 - 3x))\frac{d}{dx}(2x^2 - 3x)$$
$$= 3\sin^2(2x^2 - 3x)\cos(2x^2 - 3x)\left(4x \quad - 3\right)$$
$$= (12x - 9)\sin^2(2x^2 - 3x)\cos(2x^2 - 3x)$$

Cara 3

$y = \sin^n u \quad \Rightarrow y' = n \sin^{n-1} u .\cos u .u'$

$y = \sin^3(2x^2 - 3x) \quad \Rightarrow y' = 3\sin^2(2x^2 - 3x).\cos(2x^2 - 3x).(4x - 3)$

$y' = (12x - 9)\sin^2(2x^2 - 3x).\cos(2x^2 - 3x).(4x - 3)$

Jadi, untuk aturan rantai lainnya diperoleh:

Aturan Rantai

$y = \sin^n u \Rightarrow y' = n \sin^{n-1} u .\cos u . u'$

$y = \cos^n u \Rightarrow y' = -n \cos^{n-1} u . \sin u . u'$

$y = \tan^n u \Rightarrow y' = n \tan^{n-1} u . \sec^2 u . u'$

$y = \cot^n u \Rightarrow y' = -n \cot^{n-1} u .\csc^2 u . u'$

$y = \sec^n u \Rightarrow y' = n \sec^{n-1} u .\sec u \tan u . u'$

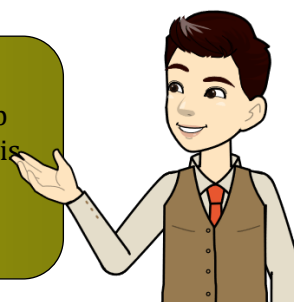
$y = \csc^n u \Rightarrow y' = -n \csc^{n-1} u .\csc u \cot u . u'$

dengan $u = u(x)$

Turunan Kedua

Jika f fungsi yang terturunkan, maka turunannya f' juga berupa fungsi, sehingga f' boleh jadi mempunyai turunan tersendiri, yang dinyatakan oleh $(f')' = f''$. Fungsi f'' yang baru ini disebut turunan kedua dari f karena dia berupa turunan dari turunan f.

Definisi 1

Jika $f'(x)$ (turunan pertama suatu fungsi) diturunkan lagi terhadap x, maka akan diperoleh turunan kedua fungsi $f(x)$ terhadap x, ditulis dengan $f''(x)$ atau y'' atau $\frac{d^2 f}{dx^2}$ atau $\frac{d^2 y}{dx^2}$ atau $D^2 f(x)$.

Contoh 5

Tentukan turunan kedua fungsi trigonometri berikut.

a. $y = \sin(3x + \pi)$
b. $y = \cos^2 x$
c. $y = x \cos x$

Penyelesaian :

a. $y = \sin(3x + \pi)$

$y' = 3\cos(3x + \pi)$ (turunan $y = \sin u$ adalah $y' = u' \cos u$)

$y'' = -9\sin(9x + \pi)$ (turunan $y = \cos u$ adalah $y' = -u' \sin u$)

b. $y = \cos^2 x$
$y' = -2 \cos x \sin x$ (turunan $y = u^2$ adalah $y' = 2u \cdot u'$)
$y' = -\sin 2x$ ($\sin 2x = 2 \sin x \cos x$)
$y'' = -2 \cos 2x$ (turunan $y = \sin u$ adalah $y' = u' \cos u$)

c. $y = x \cos x$
$y' = \cos x - x \sin x$ ($y = uv \Rightarrow y' = u'v + uv'$)
$y'' = -\sin x - (\sin x + x \cos x)$ ($y = uv \Rightarrow y' = u'v + uv'$)
$y'' = -2 \sin x - x \cos x$

Laju yang Berkaitan

Hal utama dalam persoalan laju yang berkaitan adalah menghitung laju perubahan suatu besaran dalam bentuk laju perubahan besaran lain (yang boleh jadi jauh lebih mudah diukur). Jika variabel y tergantung kepada waktu, maka turunannya $\frac{dy}{dt}$ disebut **laju sesaat perubahan**. Tentu saja, jika y mengukur jarak, maka laju sesaat perubahan ini juga disebut kecepatan (v). Laju sesaat dari perubahan kecepatan akan menghasilkan percepatan (a).

- kecepatan $v \Rightarrow v(t) = \frac{dy}{dt} = y'(t)$
- percepatan $a \Rightarrow a(t) = \frac{dv}{dt} = v'(t) = \frac{d^2y}{dt^2} = y''(t)$

Kita tertarik pada beraneka laju sesaat, laju air mengalir ke dalam ember, laju membesarnya luas pencemaran minyak, laju bertambahnya nilai kapling tanah, dan lain-lain.

Strategi untuk pemecahan masalah khususnya mengenai laju yang berkaitan, adalah:
1. Baca masalah secara seksama.
2. Gambarkan diagram jika mungkin.
3. Perkenalkan notasi. Berikan lambing kepada semua besaran yang merupakan fungsi waktu.
4. Nyatakan informasi yang diketahui dan laju yang diperlukan dalam bentuk turunan.
5. Tuliskan persamaan yang mengaitkan beragam besaran dari masalah tersebut. Jika perlu, gunakan geometri untuk menghilangkan satu peubah melalui substitusi.
6. Gunakan aturan rantai untuk menurunkan kedua ruas persamaan terhadap t.
7. Substitusikan informasi yang diketahui ke dalam persamaan yang dihasilkan dan pecahkan untuk laju yang tidak diketahui tersebut.

Contoh 6

Sebuah gelombang transversal merambat dengan persamaan $y = 0{,}1 \sin\left(\frac{1}{4}\pi t - \frac{1}{4}\pi x\right)$. Sebuah penelitian dilakukan pada jarak 2 meter dari pusat gelombang. Berapakah kecepatan dan percepatan partikel gelombang itu pada saat detik ke-3?

Penyelesaian:

$$y = 0{,}1 \sin\left(\frac{1}{4}\pi t - \frac{1}{4}\pi x\right)$$

Persamaan kecepatan dan percepatan gelombang tersebut adalah:

$v = y' = \left(\frac{1}{4}\pi\right) 0{,}1 \cos\left(\frac{1}{4}\pi t - \frac{1}{4}\pi x\right) = 0{,}025\pi \cos\left(\frac{1}{4}\pi t - \frac{1}{4}\pi x\right)$, dan

$a = v' = y'' = \left(\frac{1}{4}\pi\right) 0{,}025\pi \sin\left(\frac{1}{4}\pi t - \frac{1}{4}\pi x\right) = 0{,}00625\pi^2 \sin\left(\frac{1}{4}\pi t - \frac{1}{4}\pi x\right)$

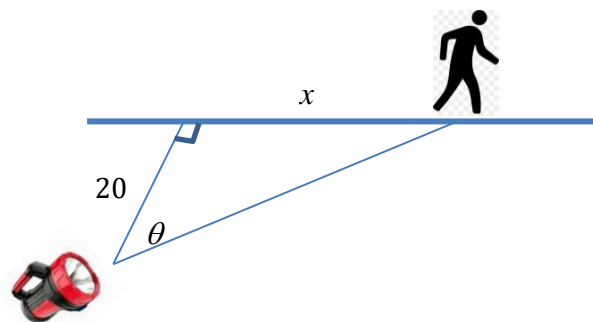
Pada saat $t = 3$ detik dan $x = 2$ meter, maka

$$v = 0{,}025\pi \cos\left(\frac{1}{4}\pi(3) - \frac{1}{4}\pi(2)\right)$$
$$= 0{,}025\pi \cos\left(\frac{1}{4}\pi\right)$$
$$= 0{,}025\pi\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$$
$$= 0{,}0125\pi\sqrt{2}$$
$$\approx 0{,}056$$
$$a = 0{,}00625\pi^2 \sin\left(\frac{1}{4}\pi(3) - \frac{1}{4}\pi(2)\right)$$
$$= 0{,}00625\pi^2 \sin\left(\frac{1}{4}\right)$$
$$= 0{,}00625\pi^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$$
$$\approx 0{,}0436$$

Jadi, kecepatan partikel gelombang pada detik ke-3 di posisi 2 meter dari pusat gelombang adalah 0,056 m/detik dan percepatan partikel gelombangnya adalah 0,0436 m^2/detik.

Contoh 7

Seseorang berjalan menurut tapak lurus pada kecepatan 4 meter/detik. Lampu pencari terletak di tanah sejauh 20 meter dari tapak dan tetap dipusatkan pada orang itu. Pada laju berapa lampu pencari berputar jika orang itu berada 15 meter dari titik pada tapak yang terdekat ke lampu pencari?

Penyelesaian:

Kita lukiskan seperti gambar di atas dan misalkan x adalah jarak dari titik pada tapak yang terdekat ke lampu pencari ke orang tersebut. Kita misalkan θ adalah sudut antara sinar lampu pencari dan garis tegak lurus pada tapak.

Diketahui bahwa $\frac{dx}{dt} = 4$ meter/detik dan diminta mencari $\frac{d\theta}{dt}$ pada saat $x = 15$. Persamaan yang mengaitkan x dan θ dapat dituliskan berdasarkan Gambar.

$$\frac{x}{20} = \tan\theta$$
$$x = 20\tan\theta$$

Dengan menurunkan masing-masing ruas terhadap t, diperoleh

$$\frac{dx}{dt} = 20\sec^2\theta\frac{d\theta}{dt}$$

Sehingga

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{20}\cos^2\theta\frac{dx}{dt} = \frac{1}{20}\cos^2\theta(4) = \frac{1}{5}\cos^2\theta$$

Pada saat x = 15, panjang sinar adalah 25, sehingga $\cos\theta = \frac{4}{5}$ dan

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{125} = 0{,}128$$

Jadi, lampu pencari berputar pada laju 0,128 radian/detik.

C. Rangkuman

- Jika f dan g keduanya fungsi fungsi yang dapat diturunkan dan $F = f \circ g$ adalah fungsi komposisi yang didefinisikan oleh $F = f(g(x))$, maka F dapat diturunkan menjadi F' yang diberikan oleh hasil kali

$$F'(x) = f'\big(g(x)\big)g'(x)$$

Dalam notasi Leibniz, jika $y = f(u)$ dan $u = g(x)$ keduanya fungsi yang dapat diturunkan, maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx}$$

- Misalkan $u = u(x)$, maka rumus umum turunan fungsi trigonometri adalah:
  - $y = \sin^n u \Rightarrow y' = n \sin^{n-1} u . \cos u . u'$
  - $y = \cos^n u \Rightarrow y' = -n \cos^{n-1} u . \sin u . u'$
  - $y = \tan^n u \Rightarrow y' = n \tan^{n-1} u . \sec^2 u . u'$
  - $y = \cot^n u \Rightarrow y' = -n \cot^{n-1} u . \csc^2 u . u'$
  - $y = \sec^n u \Rightarrow y' = n \sec^{n-1} u . \sec u \tan u . u'$
  - $y = \csc^n u \Rightarrow y' = -n \csc^{n-1} u . \csc u \cot u . u'$
- Jika $f'(x)$ (turunan pertama suatu fungsi) diturunkan lagi terhadap x, maka akan diperoleh turunan kedua fungsi $f(x)$ terhadap x, ditulis dengan $f''(x)$ atau y'' atau $\frac{d^2 f}{dx^2}$ atau $\frac{d^2 y}{dx^2}$.
- Laju yang berkaitan adalah menghitung laju perubahan suatu besaran dalam bentuk laju perubahan besaran lain (yang boleh jadi jauh lebih mudah diukur). Jika variabel y tergantung kepada waktu, maka turunannya $\frac{dy}{dt}$ disebut laju sesaat perubahan.

D. Latihan Soal

Kerjakan latihan soal berikut dengan jujur dan benar.

1. Tentukan turunan pertama dari fungsi trigonometri berikut.
   a. $f(x) = \cos (4x - \pi)$
   b. $f(x) = \cos^5 (3 - 2x)$
   c. $f(x) = x\cos^2 2x - 2x^3$
2. a. Jika $f(x) = 4\cos^3 x$, maka tentukan nilai $f'(x)$ untuk $x = \frac{\pi}{3}$
   b. Jika $f(x) = \sin^2(2x + \frac{\pi}{6})$, maka tentukan nilai $f'(0)$.
3. Tentukan turunan kedua dari fungsi trigonometri berikut.
   a. $y = \cos (2x + \pi)$
   b. $y = \sin^2 x$
4. Sebuah gelombang transversal merambat dengan persamaan $y = 2\sin(5\pi t - \pi x)$. Sebuah penelitian dilakukan pada jarak 4 meter dari pusat gelombang. Berapakah kecepatan dan percepatan partikel gelombang itu pada saat detik ke-2?
5. Disebuah menara yang tingginya 100 m dari atas tanah, seorang penjaga pantai melihat sebuah kapal mendekat dengan laju 5 m/s. Tentukan laju perubahan sudut depresi penjaga pantai terhadap waktu pada saat jarak kapal terhadap menara 100 m.

Kunci Jawaban dan Pembahasan

1. Tentukan turunan pertama dari fungsi trigonometri berikut.
   a. $f(x) = \cos(4x - \pi)$
   b. $f(x) = \cos^5(3 - 2x)$
   c. $f(x) = x\cos^2 2x - 2x^3$

   Penyelesaian:

   a. $f(x) = \cos(4x - \pi)$ **(skor maksimum 10)**

   $y = \cos u \Rightarrow y' = -\sin u \,.\, u'$

   maka

   $f'(x) = -\sin(4x - \pi)(4)$

   $f'(x) = -4\sin(4x - \pi)$

   b. $f(x) = \cos^5(3 - 2x)$ **(skor maksimum 10)**

   $y = \cos^n u \Rightarrow y' = -n\cos^{n-1} u \,.\, \sin u \,.\, u'$

   maka

   $f'(x) = -5\cos^4(3 - 2x)\sin(3 - 2x)(-2)$

   $= 10\cos^4(3 - 2x)\sin(3 - 2x)$

   $= 5\cos^3(3 - 2x)\,[2\cos(3 - 2x)\sin(3 - 2x)$

   $= 5\cos^3(3 - 2x)\sin 2(3 - 2x)$

   $= 5\cos^3(3 - 2x)\sin(6 - 4x)$

   c. $f(x) = x\cos^2 2x - 2x^3$ **(skor maksimum 10)**

   $f'(x) = 1.\cos^2 2x + x.(2.\cos 2x.(-\sin 2x).2) - 6x^2$

   $= \cos^2 2x - 4x.\cos 2x\sin 2x - 6x^2$

   $= \cos^2 2x - 2x.(2\cos 2x\sin 2x) - 6x^2$

   $= \cos^2 2x - 2x.\sin 2(2x) - 6x^2$

   $= \cos^2 2x - 2x.\sin 4x - 6x^2$

2. a. Jika $f(x) = 4\cos^3 x$, maka tentukan nilai $f'(x)$ untuk $x = \frac{\pi}{3}$

   Penyelesaian: **(skor maksimum 10)**

   $f(x) = 4\cos^3 x$

   $f'(x) = 4.3.\cos^2 x.(-\sin x)$

   $f'(x) = -12.\sin x.\ \cos^2 x$

   $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -12\sin\frac{\pi}{3}.\ \cos^2\frac{\pi}{3}$

   $= -12\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2$

   $= -\frac{3}{2}\sqrt{3}$

   b. Jika $f(x) = \sin^2(2x + \frac{\pi}{6})$, maka tentukan nilai $f'(0)$.

   Penyelesaian: **(skor maksimum 10)**

   $f(x) = \sin^2(2x + \frac{\pi}{6})$

   $f'(x) = 2.\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right).\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right).2$

   $f'(x) = \sin 2\left(\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)\right).2$

   $f'(0) = 2.\sin 2(2.0 + \frac{\pi}{6})$

   $= 2.\sin\frac{2\pi}{6}$

   $= 2.\sin\frac{\pi}{3}$

   $= 2.\frac{1}{2}$

$= 1$

3. Tentukan turunan kedua dari fungsi trigonometri berikut.
   a. $y = \cos(2x + \pi)$
   b. $y = \sin^2 x$

   Penyelesaian:

   a. $y = \cos(2x + \pi)$ **(skor maksimum 10)**
      $y' = -2\sin(2x + \pi)$ (turunan $y = \cos u$ adalah $y' = -u' \sin u$)
      $y'' = -4\cos(2x + \pi)$ (turunan $y = \sin u$ adalah $y' = u' \cos u$)

   b. $y = \sin^2 x$ **(skor maksimum 10)**
      $y' = 2\sin x \cos x$ (turunan $y = u^2$ adalah $y' = 2u \,.\, u'$)
      $y' = \sin 2x$ ($\sin 2x = 2\sin x \cos x$)
      $y'' = 2\cos 2x$ (turunan $y = \sin u$ adalah $y' = u' \cos u$)

4. Sebuah gelombang transversal merambat dengan persamaan $y = 2\sin(5\pi t - \pi x)$. Sebuah penelitian dilakukan pada jarak 4 meter dari pusat gelombang. Berapakah kecepatan dan percepatan partikel gelombang itu pada saat detik ke-2?

   Penyelesaian: **(skor maksimum 10)**

   $y = 2\sin(5\pi t - \pi x)$

   Persamaan kecepatan dan percepatan gelombang tersebut adalah:

   $v = y' = (5\pi)\, 2\cos(5\pi t - \pi x) = 10\pi\cos(5\pi t - \pi x)$, dan

   $a = v' = y'' = -(5\pi)10\pi\sin(5\pi t - \pi x) = -50\pi^2\sin(5\pi t - \pi x)$

   Pada saat $t = 2$ detik dan $x = 4$ meter, maka

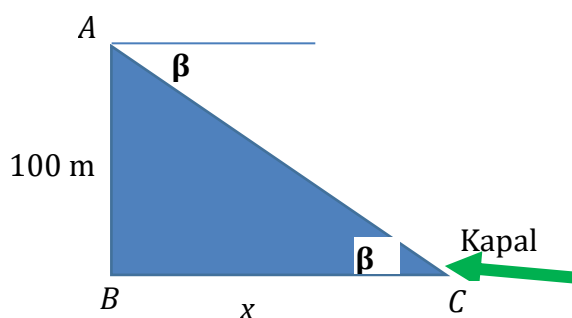
   $v = 10\pi\cos\big(5\pi(2) - \pi(4)\big) = 10\pi\cos(6\pi) = 10\pi$

   $a = -50\pi^2\sin\big(5\pi(2) - \pi(4)\big) = -50\pi^2\sin(6\pi) = 0$

   Jadi, kecepatan partikel gelombang pada detik ke-2 di posisi 4 meter dari pusat gelombang adalah 10π m/detik dan percepatan partikel gelombangnya adalah 0.

5. Disebuah menara yang tingginya 100 m dari atas tanah, seorang penjaga pantai melihat sebuah kapal mendekat dengan laju 5 m/s. Tentukan laju perubahan sudut depresi penjaga pantai terhadap waktu pada saat jarak kapal terhadap menara 100 m.

   Penyelesaian: **(skor maksimum 10)**

   Perhatikan gambar berikut:

Diketahui : $\frac{dx}{dt} = 5$ m/s, $AB = 100$ m, $BC = 100$ m

Ditanyakan : $\frac{d\beta}{dt}$

Dari ΔABC, perhatikan

$\cot\beta = \frac{BC}{AB} = \frac{x}{100}$

$x = 100.\cot\beta$

Ruas kiri dan ruas kanan diturunkan terhadap t.

$\frac{dx}{dt} = 100.(-\csc^2\beta)\frac{d\beta}{dt}$,

Subtitusikan $\frac{dx}{dt} = 5$ dan $\tan\beta = \frac{BC}{AB} = \frac{100}{100} = 1 \rightarrow \beta = \frac{\pi}{4}$

5 = 100.$(-\csc^2 \frac{\pi}{4})\frac{d\beta}{dt}$

$\frac{5}{100} = -(\sqrt{2})^2 \frac{d\beta}{dt}$

$\frac{1}{20} = -2\frac{d\beta}{dt}$

$\frac{d\beta}{dt} = -\frac{1}{40}$ (tanda negative hanya menunjukkan arah)

Jadi, laju perubahan sudut depresi penjaga pantai terhadap waktu $\frac{1}{40}$ radian/sekon.

E. Penilaian Diri

Ananda isilah pertanyaan pada tabel di bawah ini sesuai dengan yang Anda ketahui, berilah penilaian secara jujur, objektif, dan penuh tanggung jawab dengan memberi tanda centang pada kolom pilihan.

No.	Pertanyaan	Jawaban	
		Ya	Tidak
1.	Apakah Anda mampu menentukan turunan fungsi trigonometri ?		
2.	Apakah Anda telah memahami penggunaan aturan rantai?		
3.	Apakah Anda dapat menggunakan aturan rantai dalam turunan fungsi trigonometri?		
4.	Apakah Anda dapat menentukan turunan kedua fungsi trigonometri?		
5.	Dapatkah Anda menyelesaikan masalah penggunaan turunan fungsi trigonometri dalam laju yang berkaitan?		

Catatan:
Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan review pembelajaran,
Bila semua jawaban "Ya", maka Anda dapat melanjutkan ke pembelajaran berikutnya.

EVALUASI

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat.

1. Jika $y = 3x^4 + \sin 2x + \cos 3x$, maka $\frac{dy}{dx}$ = ….
   A. $12x^3 + 2\cos 2x + 3\sin 3x$
   B. $12x^3 + \cos 2x - \sin 3x$
   C. $12x^3 - 2\cos 2x + 3\sin 3x$
   D. $12x^3 - 2\cos 2x - 3\sin 3x$
   E. $12x^3 + 2\cos 2x - 3\sin 3x$
2. Jika $y = 3\sin 2x - 2\cos 3x$, maka $\frac{dy}{dx} = \cdots$.
   A. $6\cos 2x + 6\sin 3x$
   B. $-6\cos 2x - 6\sin 3x$
   C. $6\cos 2x - 6\sin 3x$
   D. $3\cos 2x + 3\sin 3x$
   E. $3\cos 2x - 3\sin 3x$
3. Jika $f(x) = a\ \tan x\ + bx$, dengan $f\ '\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3$ dan $f\ '\left(\frac{\pi}{3}\right) = 9$, nilai $a + b$ = ….
   A. 0
   B. 1
   C. $\frac{1}{2}\pi$
   D. 2
   E. π
4. Jika $f(x) = a\cot x + bx$ dan $f'(\frac{1}{6}\pi) = 5$ dan $f'(\frac{1}{4}\pi) = 1$, maka nilai $a.b$ = ….
   A. –6
   B. –3
   C. 3
   D. 6
   E. 8
5. Jika fungsi $f(x) = \sin ax + \cos bx$ memenuhi $f'(0) = b$ dan $f'\left(\frac{\pi}{2a}\right) = -1$, maka $a + b$ = ….
   A. –1
   B. 0
   C. 1
   D. 2
   E. 3
6. Jika $f(x) = x\cos x$, maka $f'(x + \frac{1}{2}\pi)$ = ….
   A. $-\sin x - x\cos x + \frac{1}{2}\pi\cos x$
   B. $-\sin x - x\cos x - \frac{1}{2}\pi\cos x$
   C. $-\sin x + x\cos x - \frac{1}{2}\pi\cos x$
   D. $-\sin x + x\cos x + \frac{1}{2}\pi\cos x$
   E. $-\cos x + x\sin x + \frac{1}{2}\pi\cos x$
7. Turunan pertama fungsi $f(x) = 5\sin x\cos x$ adalah $f'(x)$ = ….
   A. $5\sin 2x$
   B. $5\cos 2x$
   C. $5\sin^2 x\cos x$
   D. $5\sin x\cos^2 x$
   E. $5\sin 2x\cos x$

8. Turunan pertama dari $f(x) = (3x^2 - 5)\cos x$ adalah $f'(x) = ...$
   A. $3x \sin x + (3x^2 - 5) \cos x$
   B. $3x \cos x + (3x^2 - 5) \sin x$
   C. $-6x \sin x - (3x^2 - 5) \cos x$
   D. $6x \cos x + (3x^2 - 5) \sin x$
   E. $6x \cos x - (3x^2 - 5) \sin x$
9. Turunan pertama dari $y = \dfrac{\sin x}{\sin x + \cos x}$ adalah $y' = ...$
   A. $\dfrac{\cos x}{(\sin x + \cos x)^2}$
   B. $\dfrac{1}{(\sin x + \cos x)^2}$
   C. $\dfrac{2}{(\sin x + \cos x)^2}$
   D. $\dfrac{\sin x - \cos x}{(\sin x + \cos x)^2}$
   E. $\dfrac{2 \sin x \cos x}{(\sin x + \cos x)^2}$
10. Diketahui $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}$. Jika $f'(x)$ adalah turunan dari $f(x)$ maka nilai dari $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \ldots.$
   A. $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$
   B. $-\frac{1}{2}$
   C. $\frac{1}{4}\sqrt{2}$
   D. $\frac{1}{2}$
   E. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
11. Jika $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x}$, $\sin x \neq 0$ dan $f'(x)$ adalah turunan $f(x)$, maka $f'(\frac{\pi}{2}) = ...$
   A. -2
   B. -1
   C. 0
   D. 1
   E. 2
12. Nilai turunan pertama $y = \sin(x + 20^o)$ pada $x = 10^o$ adalah ....
   A. $\frac{1}{2}$
   B. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
   C. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$
   D. $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$
   E. $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$
13. Jika $f(x) = -(\cos^2 x - \sin^2 x)$, maka $f'(x)$ adalah ....
   A. $2(\sin x + \cos x)$
   B. $2(\cos x - \sin x)$
   C. $\sin x \cos x$
   D. $2 \sin x \cos x$
   E. $4 \sin x \cos x$

14. Diketahui fungsi $f(x)$ = (x + sin 3x) dan $g(x)$= x^2. Jika $u(x) = g(f(x))$, maka turunan pertama dari $u(x)$ adalah $u'(x)$ = ...
A. 2 (x + sin 3x + 3 x sin 3x + 3 $\sin^2 3x$)
B. 2x + 2 sin 3x + 6 x cos 3x + 3 sin 6x
C. 2x + 6 sin 3x + cos 3x
D. 2 (x + sin 3x + 3 sin 3x + $\sin^2 3x$)
E. 2x + 6 sin 3x + 3x cos 3x + sin 3x cos 3x
15. Turunan pertama $f(x) = \cos^3 x$ adalah ….
A. $f'(x) = -\frac{3}{2}\cos x \sin 2x$
B. $f'(x) = \frac{3}{2}\cos x \sin 2x$
C. $f'(x) = -3 \sin x \cos x$
D. $f'(x) = 3 \sin x \cos x$
E. $f'(x) = -3\cos^2 x$
16. Diketahui $F(x) = \sin^2(2x + 3)$. Turunan pertama dari $F(x)$adalah….
A. $F'(x) = -4\sin(4x + 6)$
B. $F'(x) = -2\sin(4x + 6)$
C. $F'(x) = \sin(4x + 6)$
D. $F'(x) = 2\sin(4x + 6)$
E. $F'(x) = 4\sin(4x + 6)$
17. Turunan pertama dari $f(x) = \sqrt[3]{\sin^2 3x}$ adalah $f'(x) =\ldots.$
A. $\frac{2}{3}\cos^{-\frac{1}{3}}3x$
B. $2\cos^{-\frac{1}{3}}3x$
C. $\frac{2}{3}\cos^{-\frac{1}{3}}3x\sin 3x$
D. $-2\cot 3x \cdot \sqrt[3]{\sin^2 3x}$
E. $2\cot 3x \cdot \sqrt[3]{\sin^2 3x}$
18. Jika $f(x) = \sin^2\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$, maka nilai dari $f'(0) =\ldots.$
A. $2\sqrt{3}$
B. 2
C. $\sqrt{3}$
D. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$
E. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
19. Diketahui $y = x \cos x$, maka $y'' + y$ = ….
A. sin x cos x
B. 2 cos x
C. – 2 sin x
D. cos x – sin x
E. 2 cos x – 1
20. Turunan kedua dari $f(x) = \cos^2 2x$ adalah ....
A. –6 sin 2x
B. –8 cos 4x
C. 8 cos 4x
D. 8 sin 4x
E. 3 sin 2x cos 2x
21. Sebuah partikel sedang bergerak dengan persamaan perpindahan dari titik awal gerak $x = 5\cos\left(2t - \frac{\pi}{3}\right)$ dengan x dalam meter dan t dalam sekon. Kecepatan awal partikel adalah ….

A. 2
B. 3
C. 4
D. 5
E. $5\sqrt{3}$

22. Sebuah gelombang merambat dengan persamaan $y = 3\sin(2\pi t - \pi x)$. Sebuah penelitian dilakukan pada jarak 2 meter dari pusat gelombang. Kecepatan gelombang itu pada saat detik ke-2 adalah ….
A. 3π m/detik
B. 4π m/detik
C. 6π m/detik
D. 7π m/detik
E. 8π m/detik

23. Rata-rata pertumbuhan suatu bakteri setelah t detik diberikan oleh persamaan $N(t)$ = cos t + 5 tan 5t. Laju sesaat pertumbuhan bakteri tersebut ketika mencapai 30 detik ….
A. $\frac{197}{12}$ bakteri/detik
B. $\frac{197}{6}$ bakteri/detik
C. $\frac{100}{3}$ bakteri/detik
D. $\frac{197}{3}$ bakteri/detik
E. $\frac{197}{2}$ bakteri/detik

24. Sebuah layang-layang terbang 100 kaki di atas tanah, bergerak dalam arah horizontal dengan laju 10 kaki / detik. Seberapa cepat sudut antara tali dan perubahan horizontal ketika panjang tali yang terulur 300 kaki keluar?
A. $\frac{1}{90}$
B. $\frac{1}{45}$
C. $\frac{1}{30}$
D. 30
E. 90

25. Dua sisi sebuah segitiga mempunyai panjang 4 m dan 5 m dan sudut diantaranya bertambah pada laju 0,06 radial/detik. Laju bertambahnya luas segitiga pada waktu sudut antar sisi panjang tetap $\frac{\pi}{3}$ adalah ….
A. 0,03 m^2/detik
B. 0,1 m^2/detik
C. 0,2 m^2/detik
D. 0,3 m^2/detik
E. 0,6 m^2/detik

KUNCI JAWABAN EVALUASI

1. E
2. A
3. A
4. D
5. D
6. B
7. B
8. E
9. B
10. A
11. B
12. C
13. E
14. B
15. A
16. D
17. E
18. C
19. B
20. B
21. D
22. C
23. B
24. A
25. D

DAFTAR PUSTAKA

Chakrabarti, J, *et al*. 2014. *Matematika untuk SMA Kelas XI Peminatan Matematika dan Ilmu Alam*. Bogor: Quadra.

Kanginan, Marthen. 2016. *Matematika Kelas XII Peminatan*. Bandung: Yrama Widya.

Priatna, Nanang dan Titi Sukamto. 2016. *Buku Siswa Aktif dan Kreatif Belajar Matematika untuk SMA/MA Kelas XII Peminatan Matematika dan Ilmu-Ilmu Alam*. Bandung: Grafindo Media Pratama.

Purcell, E.J., dan Dale Varberg. 1990. *Kalkulus dan Geometri Analitis Edisi Keempat*. Jakarta: Erlangga.

Setiawan. 2004. *Pengantar Kalkulus*. Yogyakarta: PPPG Matematika.

Simangunsong, W., dan Frederik M. Poyk. 2016. *Matematika Peminatan Kelas XII SMA/MA*. Jakarta: Gematama.

Soedyarto, Nugroho. 2008. *Matematika Aplikasi Jilid 2*. Jakarta: Pusat Perbukuan Depatemen Pendidikan Nasional.

Suparmin dan Aditya Nur Rochma. 2016. *Matematika Peminatan Matematika dan Ilmu-ilmu Alam untuk SMA/MA Kelas XII*. Surakarta: Mediatama.

Stewart, James. 2001. *Kalkulus Edisi Keempat*. Jakarta: Erlangga.